E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1979

Option "Sciences physiques" (P')

MATHEMATIQUES I (4 h)

Dans ce problème, E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. La locution « sous-espace » sera utilisée pour désigner un sous-espace vectoriel. On notera : Vect $(x_1, \ldots, x_k)$ le sous-espace engendré par une famille $(x_1, \ldots, x_k)$ d'éléments de E.

On considère une forme bilinéaire symétrique Φ sur E et Q la forme quadratique associée.

I

On dira que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $\Phi(x, y) = 0$. (On ne suppose pas que Q est définie positive.) Si F est un sous-espace de E, l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est le sous-espace de E formé par les éléments de E orthogonaux à tous les éléments de F. On admet que : lorsque Φ est non dégénérée, c'est-à-dire lorsque $E^\perp = \{0\}$, on a pour tout sous-espace F de E la relation : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

F, G et H désignent des sous-espaces de E.

1° Démontrer que la relation : $F \subset G$ implique la relation : $G^\perp \subset F^\perp$.

2° Démontrer que, quels que soient F, G et H, on a les relations :

$$F \subset F^{\perp\perp}, \quad G^\perp + H^\perp \subset (G \cap H)^\perp, \quad G^\perp \cap H^\perp = (G + H)^\perp.$$

Donner l'exemple d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et de sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels les deux premières inclusions sont strictes.

Si on suppose Φ non dégénérée, peut-on préciser les résultats précédents ?

Dans toute la suite du problème, on suppose Φ non dégénérée.

II

On appelle $\mathfrak{I}$ (E, Φ) (que l'on note simplement $\mathfrak{I}$) l'ensemble des sous-espaces F de E tels que $F \subset F^\perp$. $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{I}$ qui ne sont strictement inclus dans aucun élément de $\mathfrak{I}$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments maximaux de $\mathfrak{I}$ ordonné par inclusion).

1° Dans cette question, on étudie l'exemple : $E = \mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Q est la forme quadratique qui, à $x = (x_1, x_2, x_3)$ élément de E, associe : $Q(x) = 2 x_1 x_2 + x_3^2$.

a. Quelle est la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

On pose : F = Vect (e_1), G = Vect (e_2), H = Vect (e_3). Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$. Vérifier que F et G sont des éléments de $\mathfrak{I}$.

b. Soient x et y des éléments non nuls de E, orthogonaux. Démontrer que si $Q(x) = Q(y) = 0$, alors x et y sont colinéaires. Que peut-on en déduire sur la dimension des éléments de $\mathfrak{M}$?

2° On ne suppose plus que $E = \mathbb{R}^3$.

On appelle base de Witt de E pour Φ, toute base $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de E pour laquelle il existe deux entiers naturels q et k, et un élément ε de l'ensemble $\{-1, +1\}$, tels que la matrice de Φ dans w soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_q & 0 \\ I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_k \end{pmatrix}$$

où I_q et I_k désignent respectivement les matrices unité d'ordres q et k.

On suppose que E admet une base de Witt, w, pour Φ.

a. Vérifier que Φ est non dégénérée.

b. On pose F = Vect $(w_1, \ldots, w_q)$, G = Vect $(w_{q+1}, \ldots, w_{2q})$, H = Vect $(w_{2q+1}, \ldots, w_n)$.

Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$. Vérifier que $G \cap F^\perp = \{0\}$, $H = (F + G)^\perp$.

Quels sont les éléments x de $F^\perp$ tels que $Q(x) = 0$? En déduire que F et G appartiennent à $\mathfrak{M}$.

c. On appelle Φ-base de E, toute base $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de E pour laquelle il existe un entier naturel $s(v)$, noté s, tel que l'on ait les relations : $Q(v_i) = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, $Q(v_i) = -1$ pour $s + 1 \leqslant i \leqslant n$ et $\Phi(v_i, v_j) = 0$ pour $i \neq j$.

.../...

Construire, à l'aide de w, une Φ-base de E.

3° On admet qu'il existe des Φ-bases de E.

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ l'une de ces Φ-bases. Construire, à l'aide de v, une base de Witt de E pour Φ.

III

Étude de $\mathfrak{M}$.

1° Soient F et G deux sous-espaces de E.

a. On considère F' (resp. G') un supplémentaire de $F \cap G^\perp$ (resp. $G \cap F^\perp$) dans F (resp. G). On considère l'application linéaire Θ de F' dans le dual G'^* de G', définie par : $\Theta(x)(y) = \Phi(x, y)$, $x \in F'$ et $y \in G'$. Démontrer que Θ est linéaire et injective.

En déduire la relation :

$$\dim F - \dim F \cap G^\perp = \dim G - \dim G \cap F^\perp .$$

b. Si F et G ont même dimension p, et si $G \cap F^\perp = \{0\}$, montrer que pour toute base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G il existe une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F tel que l'on ait :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \Phi(f_i, g_j) = \delta_{ij}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

2° Soient F et G deux éléments de $\mathfrak{I}$. On considère U (resp. V) un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. G).

a. Prouver l'inclusion : $U \cap V^\perp \subset F \cap G^\perp$.

b. On suppose que : $\dim G < \dim F$. En utilisant la relation de (III, 1°, *a.*), montrer que l'on a : $U \cap V^\perp \neq \{0\}$, et que $U \cap V^\perp$ n'est pas inclus dans G. En déduire qu'il existe un élément x de E tel que $G + \mathrm{Vect}(x)$ appartienne à $\mathfrak{I}$ et contienne strictement G.

c. Montrer que $\mathfrak{M}$ n'est pas vide et conclure de ce qui précède que les éléments de $\mathfrak{M}$ ont tous la même dimension, notée $i(\Phi)$. Montrer que si E admet une Φ-base, v, on a la relation :

$$i(\Phi) = \inf(s(v), n - s(v)) .$$

3° On appelle « triplet de Witt de E pour Φ », tout triplet (F, G, H) de sous-espaces de E vérifiant les conditions :

(*i*) $F \in \mathfrak{M}$ et $G \in \mathfrak{M}$; (*ii*) $G \cap F^\perp = \{0\}$; (*iii*) $H = (F + G)^\perp$.

a. On suppose qu'il existe un tel triplet.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$. Prouver que l'une des restrictions de Φ ou de $-\Phi$ à H est définie positive.

En utilisant le résultat de (III, 1°, *b.*) montrer que l'on peut construire une base de Witt de E pour Φ à l'aide de bases de F, G, H convenablement choisies.

b. Soit F un élément de $\mathfrak{M}$, H un supplémentaire de F dans $F^\perp$. Démontrer que l'on a : $H \cap H^\perp = \{0\}$ et $F \subset H^\perp$.

On considère G' un supplémentaire de F dans $H^\perp$. Vérifier les relations :

$$E = F \oplus H \oplus G' \quad \text{et} \quad \dim F = \dim G' .$$

Soit $(g'_1, \ldots, g'_q)$ une base de G' vérifiant : $\Phi(g'_i, g'_j) = 0$ pour $i \neq j$ (on admet qu'il en existe une). On sait d'après le résultat de (III, 1°, *b.*) qu'il existe une base $(f_1, \ldots, f_q)$ de F vérifiant $\Phi(f_i, g'_j) = \delta_{ij}$. On pose :

$$g_i = g'_i + \lambda_i f_i \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ pour } i \in \{1, \ldots, q\},$$

et

$$G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_q) .$$

Montrer que l'on peut déterminer les λ_i de telle sorte que le triplet (F, G, H) soit un triplet de Witt de E pour Φ.

IV

On appelle similitude de E tout automorphisme f de E pour lequel il existe un réel $\alpha(f)$, noté simplement α, tel que l'on ait, pour tout couple (x, y) d'éléments de E : $\Phi(f(x), f(y)) = \alpha\, \Phi(x, y)$.

$\mathfrak{S}(\Phi)$ désigne l'ensemble des similitudes de E et $\mathfrak{A}(\Phi)$ l'ensemble des $\alpha(f)$ pour f élément de $\mathfrak{S}(\Phi)$. On appelle automorphisme orthogonal toute similitude f telle que $\alpha(f) = 1$. $\mathfrak{O}(\Phi)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

Enfin, si M est un sous-espace de E, on dit qu'une application linéaire u de M dans E est orthogonale si, pour tout couple (x, y) d'éléments de M, on a : $\Phi(u(x), u(y)) = \Phi(x, y)$.

. . . / . . .

1° Vérifier que $\mathcal{S}(\Phi)$ est un groupe pour la composition des applications, que $\mathcal{A}(\Phi)$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$, et que $\mathcal{O}(\Phi)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}(\Phi)$.

Que peut-on dire de $\mathcal{A}(\Phi)$ si Φ ou $-\Phi$ est définie positive ?

2° Étude de l'exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = 2x_1x_2$ pour $x = (x_1, x_2)$ élément de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les ensembles $\mathcal{S}(\Phi)$, $\mathcal{A}(\Phi)$, $\mathcal{O}(\Phi)$.

3° En utilisant une Φ-base de E, ou une base de Witt de E pour Φ, montrer que, si $n = 2\,i(\Phi)$, $\mathcal{A}(\Phi)$ est l'ensemble $\mathbb{R}^*$, et que si $n > 2\,i(\Phi)$, $\mathcal{A}(\Phi)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$.

($i(\Phi)$ a été défini dans la question (III, 2°, *c.*).)

4° Soit F un sous-espace de E tel que : $F \cap F^\perp = \{0\}$. On a alors : $E = F \oplus F^\perp$. Soit f la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$. Montrer que f est élément de $\mathcal{O}(\Phi)$. On dira que f est la symétrie orthogonale par rapport à F.

5° Soient x et y des éléments de E vérifiant les relations : $Q(x) = Q(y)$ et $Q(x) \neq 0$. Montrer que l'on ne peut avoir à la fois : $Q(x + y) = 0$ et $Q(x - y) = 0$. En déduire qu'il existe une symétrie orthogonale par rapport à une droite ou un hyperplan qui transforme x en y.

6° On se propose de démontrer le résultat suivant : « pour tout sous-espace M de E et toute application linéaire injective et orthogonale u de M dans E, il existe un élément $\tilde{u}$ de $\mathcal{O}(\Phi)$ dont la restriction à M égale u ».

Pour cela on raisonne par récurrence sur $n = \dim E$ en distinguant 3 cas :

a. M n'appartient pas à $\mathfrak{I}$ et il existe $x \in M$ vérifiant : $u(x) = x$ et $Q(x) \neq 0$. Soit $D = \mathrm{Vect}(x)$. On pose $M_1 = M \cap D^\perp$. Montrer que $M = D \oplus M_1$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à $D^\perp$.

b. M n'appartient pas à $\mathfrak{I}$. En utilisant le résultat de la question (IV, 5°), montrer que l'on peut se ramener au cas *a.*

c. M appartient à $\mathfrak{I}$. En utilisant les résultats de la partie III, montrer qu'il existe deux triplets de Witt de E pour Φ, (F, G, H) et (F′, G′, H′), tels que l'on ait : $M \subset F$ et $u(M) \subset F'$. Montrer que l'on peut alors définir $\tilde{u}$, élément de $\mathcal{O}(\Phi)$, qui prolonge u.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail